

CI2612: Algoritmos y Estructuras de Datos II

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Árboles rojo negro

© 2018 Blai Bonet

Objetivos

- Árboles rojo negro
- Operaciones de inserción y eliminación

© 2018 Blai Bonet

Árboles rojo negro

Un árbol rojo negro es un árbol binario de búsqueda que garantiza altura $O(\log n)$ cuando almacena n elementos

Adicional a los apuntadores para los hijos y el padre, los nodos tiene asociado **1 bit de color**

También se utiliza un **nodo sentinela nil** tal que el papá de la raíz es el sentinela, así como los hijos de las hojas, y uno de los hijos de los nodos internos que tienen un único hijo

Todos los nodos tienen padre bien definido excepto el sentinela

© 2018 Blai Bonet

Ejemplo de árbol rojo negro

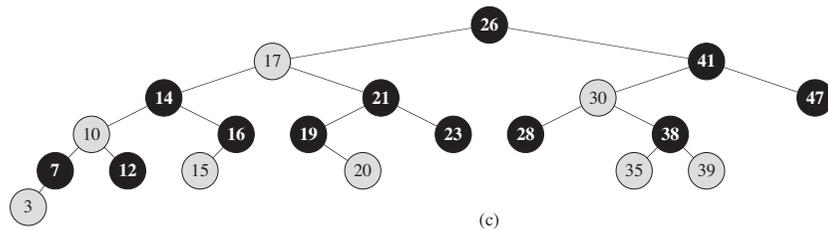


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

Ejemplo de árbol rojo negro con sentinela

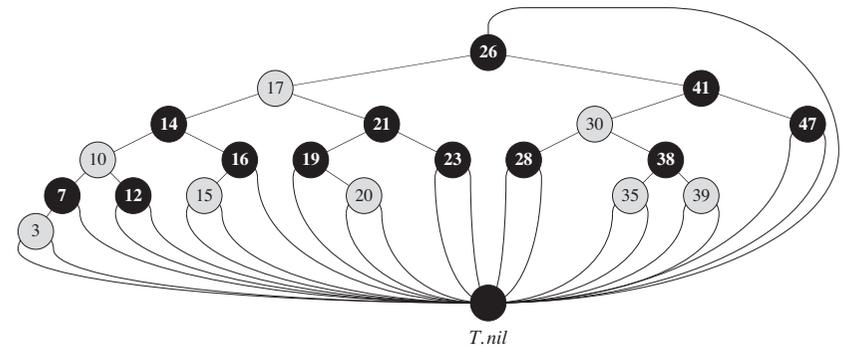


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

Claves duplicadas

En un árbol binario de búsqueda las claves duplicadas no representan ningún problema y por lo tanto son permitidas

En un árbol rojo negro las claves duplicadas son un problema al momento de insertar y eliminar nodos. Por lo tanto, en un árbol rojo negro **no se permiten claves duplicadas**

Propiedades de árboles rojo negro

Los colores son utilizados para **acotar las estructuras** permitidas

Las propiedades que definen a los árboles rojo y negro son:

- P1. Todo nodo es rojo o negro
- P2. La raíz es negra
- P3. El sentinela es negro
- P4. Si un nodo es rojo, sus hijos son negros
- P5. Para cada nodo, todos los caminos simples desde el nodo hasta las hojas tienen el **mismo número de nodos negros**

En particular, en un árbol rojo negro el camino más largo puede ser a lo sumo 2 veces más largo que el camino más corto

Altura negra

Definimos la **altura negra** de un nodo x , denotada por $bh(x)$, como el número de nodos negros, sin incluir x , en un camino simple desde x hasta las hojas

Por la propiedad P5, la **altura negra está bien definida**

Ejemplo de árbol rojo negro con alturas negras

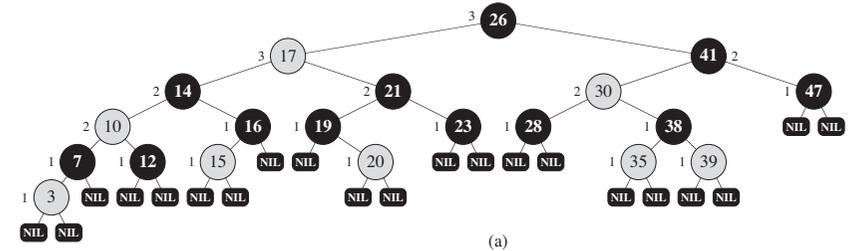


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

Altura negra: resultado fundamental

Un árbol rojo negro con n **claves (nodos internos)** tiene altura h menor o igual a $2\log_2(n + 1)$

Prueba:

Primero mostramos por inducción en $h(x)$ que el subárbol enraizado en x tiene un **número de claves** $N(x) \geq 2^{bh(x)} - 1$

- Para $h(x) = 0$, $x = \text{nil}$, $bh(x) = 0$ y $N(x) = 0 = 2^0 - 1 = 2^{bh(x)} - 1$
- Para el paso inductivo, considere un nodo x con $h(x) > 0$. Sus dos hijos y y z tienen altura negra igual a $bh(x)$ ó $bh(x) - 1$

Usando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 + N(y) + N(z) \geq 1 + (2^{bh(y)} - 1) + (2^{bh(z)} - 1) \\ &\geq 2^{bh(x)-1} + 2^{bh(x)-1} - 1 = 2^{bh(x)} - 1 \quad \square \end{aligned}$$

Altura negra: resultado fundamental

Un árbol rojo negro con n **claves (nodos internos)** tiene altura h menor o igual a $2\log_2(n + 1)$

Prueba:

Considere ahora un árbol rojo negro con raíz r y de altura h con n claves

Por la propiedad P4, **a lo sumo la mitad de los nodos** en un camino simple desde la raíz hasta las hojas son **rojos**

Por lo tanto, la altura negra de la raíz satisface $bh(r) \geq h/2$

Entonces, $n \geq 2^{bh(r)} - 1 \geq 2^{h/2} - 1 \implies n + 1 \geq 2^{h/2}$

Calculamos:

$$\log_2(n + 1) \geq h/2 \implies h \leq 2\log_2(n + 1) \quad \square$$

Operaciones tipo query sobre árboles rojo negro

Como un árbol rojo negro con n claves es un árbol binario de búsqueda de altura $O(\log n)$, entonces las operaciones de query:

- Search
- Minimum
- Maximum
- Predecessor
- Successor

corren en tiempo $O(\log n)$ sobre árboles rojo negro

Las operaciones de inserción y eliminación deben modificarse para que preserven las propiedades P1–P5 que definen los árboles rojo negro

Rotaciones

Operación fundamental para **balancear el árbol** durante inserciones y eliminaciones. Existen rotaciones a la izquierda y a la derecha:

- En una rotación a la derecha con pivote x se asume $x.left \neq \text{nil}$
- En una rotación a la izquierda con pivote x se asume $x.right \neq \text{nil}$

Como se dijo antes, se asume que el padre de la raíz es nil

Rotaciones

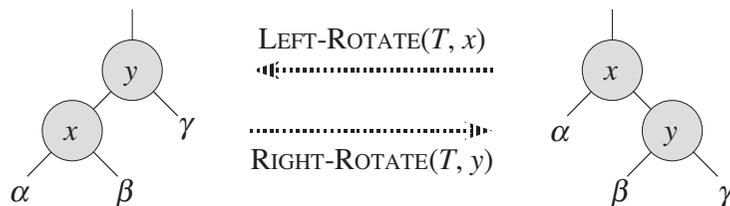


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

Ambas operaciones toman **tiempo constante**

Ambas operaciones mantienen la propiedad de **árbol de búsqueda**

Rotación a la izquierda

```
1 Left-Rotate(RBtree T, pointer x)
2   y = x.right
3   x.right = y.left
4   if y.left != T.nil then y.left.p = x
5
6   y.p = x.p
7   if x.p == T.nil
8     T.root = y
9   else if x == x.p.left
10    x.p.left = y
11  else
12    x.p.right = y
13  y.left = x
14  x.p = y
```

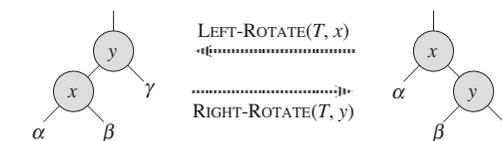


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

Ejemplo de rotación a la izquierda

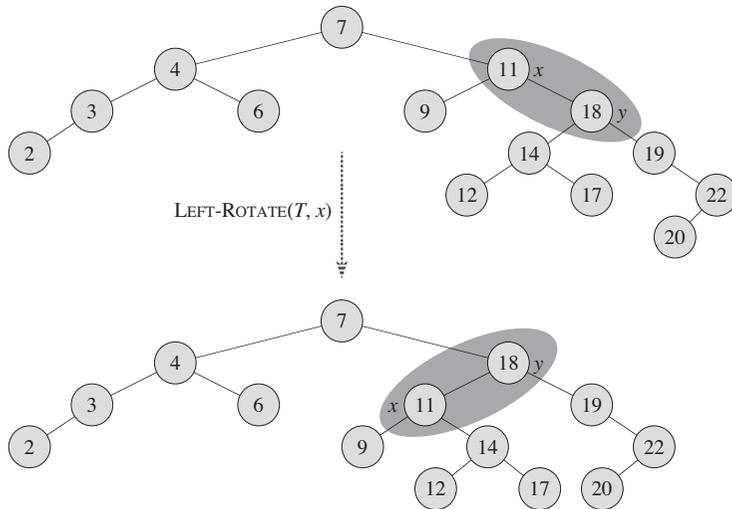


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

© 2018 Blai Bonet

Inserción

Las inserciones se hacen de manera similar a las inserciones en un árbol binario de búsqueda:

- primero se busca en donde realizar la inserción
- segundo, el nodo z se inserta a nivel de las hojas y se **pinta de rojo**
- luego, de ser necesario, se pintan y se hacen rotaciones sobre los ancestros de z para restablecer las propiedades P1–P5

© 2018 Blai Bonet

Inserción

```

1 RB-Insert(RBtree T, pointer z)
2   y = T.nil           % inicializamos x a la raíz y y al padre de x
3   x = T.root
4   while x != T.nil   % buscamos en donde hacer la inserción
5     y = x
6     if z.key < x.key
7       x = x.left
8     else
9       x = x.right
10
11  % insertamos el nodo z como hijo de y (a nivel de las hojas)
12  z.p = y
13  if y.p == T.nil
14    T.root = z
15  else if z.key < y.key
16    y.left = z
17  else
18    y.right = z
19  z.left = T.nil
20  z.right = T.nil
21
22  z.color = RED       % el nodo z se pinta de rojo
23  RB-Insert-Fixup(T, z) % restablecemos propiedades P1--P5
  
```

© 2018 Blai Bonet

Corrección en inserción

```

1 RB-Insert-Fixup(RBtree T, pointer z)
2   while z.p.color == RED
3     if z.p == z.p.p.left
4       y = z.p.p.right
5       if y.color == RED % caso 1
6         z.p.color = BLACK % caso 1
7         y.color = BLACK % caso 1
8         z.p.p.color = RED % caso 1
9         z = z.p.p % caso 1
10      else
11        if z == z.p.right % caso 2
12          z = z.p % caso 2
13          Left-Rotate(T, z) % caso 2
14
15          z.p.color = BLACK % caso 3
16          z.p.p.color = RED % caso 3
17          Right-Rotate(T, z.p.p) % caso 3
18      else
19        % como el bloque de arriba pero intercambiando left
20        % por right, y Left-Rotate por Right-Rotate
21
22  T.root.color = BLACK
  
```

© 2018 Blai Bonet

Ejemplo de inserción

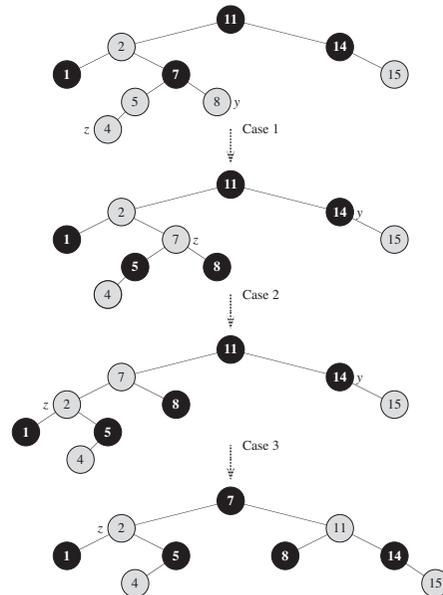


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

© 2018 Blai Bonet

Análisis de la inserción

Similar a árboles binarios, la búsqueda del lugar para la inserción toma tiempo $O(h) = O(\log n)$ donde h es la altura del árbol y n es el número de claves en el árbol

Luego, la inserción llama a **RB-Insert-Fixup**(T, z):

- en el caso 3, el padre de z se pinta de rojo y el lazo termina
- en el caso 2, a continuación se pasa al caso 3
- en el caso 1, z se asigna al “abuelo” de z

Entonces, **RB-Insert-Fixup**(T, z) toma tiempo $O(h) = O(\log n)$ en el peor caso, y la inserción toma tiempo $O(\log n)$

© 2018 Blai Bonet

Correctitud de la inserción

¿Qué propiedades pueden ser violadas después de insertar z y antes de llamar a **RB-Insert-Fixup**?

- P1. Todo nodo es rojo o negro **[CIERTA]**
- P2. La raíz es negra
- P3. El sentinela es negro **[CIERTA]**
- P4. Si un nodo es rojo, sus hijos son negros
- P5. Para cada nodo, todos los caminos simples desde el nodo hasta las hojas tienen el **mismo número de nodos negros [CIERTA]**

Solamente P2 ó P4 pudieran ser violadas

Ambas violaciones vendrían de pintar de rojo al nuevo nodo z

© 2018 Blai Bonet

Restablecimiento de las propiedades

RB-Insert-Fixup restablece las propiedades de forma iterativa

La correctitud se establece con el siguiente **invariante de tres partes** que es cierto al inicio de cada iteración del ciclo:

- el nodo z es rojo
- si $z.p$ es la raíz del árbol, entonces $z.p$ es negro
- si el árbol viola alguna de las propiedades, entonces se viola una sola de ellas que es P2 o P4. Si el árbol viola P2 es porque z es la raíz y z es rojo. Si el árbol viola P4 es porque ambos z y $z.p$ son rojos

Cuando el ciclo termina, $z.p$ es negro y por lo tanto, por el invariante, la única propiedad que pudiera estar violándose sería P2. La línea 22 restablece P2 al pintar la raíz de negro

© 2018 Blai Bonet

Caso 1 durante inserción

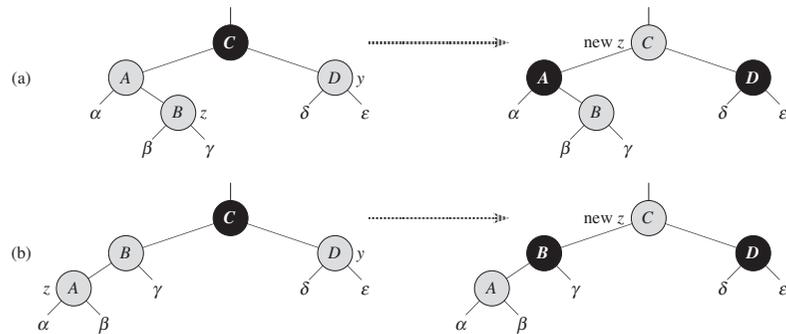


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

© 2018 Blai Bonet

Casos 2 y 3 durante inserción

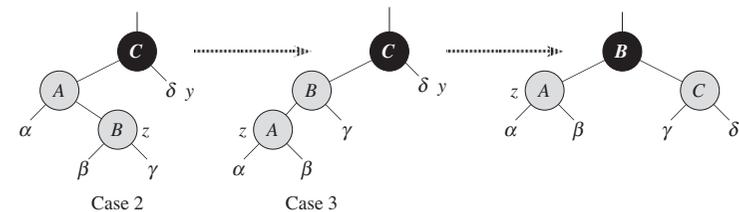


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

© 2018 Blai Bonet

Eliminación

Similar a la inserción, la eliminación se basa en la eliminación de nodos para árboles binarios de búsqueda

La eliminación recibe un apuntador al nodo z que se quiere eliminar

Como lo hicimos en árboles binarios de búsqueda, usamos una rutina de **transplante de nodos**

© 2018 Blai Bonet

Transplante de nodos en árboles rojo negro

```

1 RB-Transplant(RBtree T, pointer u, pointer v)
2   if u.p == T.nil                                % es u es raíz?
3     T.root = v
4   else if u = u.p.left                           % es u hijo izquierdo?
5     u.p.left = v
6   else                                           % u es hijo derecho
7     u.p.right = v
8   v.p = u.p

```

Un poco más sencilla que el transplante en árboles binarios de búsqueda ya que el nodo v siempre es distinto de `null`

© 2018 Blai Bonet

Eliminación en árboles rojo negro

```
1 RB-Delete(RBtree T, pointer z)
2   y = z
3   y-original-color = y.color
4   if z.left == T.nil
5     x = z.right
6     RB-Transplant(T, z, z.right)
7   else if z.right == T.nil
8     x = z.left
9     RB-Transplant(T, z, z.left)
10  else
11    y = Tree-Minimum(z.right)
12    y-original-color = y.color
13    x = y.right
14
15    if y.p == z
16      x.p = y
17    else
18      RB-Transplant(T, y, y.right)
19      y.right = z.right
20      y.right.p = y
21
22    RB-Transplant(T, z, y)
23    y.left = z.left
24    y.left.p = y
25    y.color = z.color
26
27  if y-original-color == BLACK
28    RB-Delete-Fixup(T, x)
```

© 2018 Blai Bonet

Corrección en eliminación

```
1 RB-Delete-Fixup(RBtree T, pointer x)
2   while x != T.root && x.color == BLACK
3     if x == x.p.left
4       w = x.p.right
5       if w.color == RED
6         w.color = BLACK
7         x.p.color = RED
8         Left-Rotate(T, x.p)
9         w = x.p.right
10
11     if w.left.color == BLACK && w.right.color == BLACK
12       w.color = RED
13       x = x.p
14     else
15       if w.right.color == BLACK
16         w.left.color = BLACK
17         w.color = RED
18         Right-Rotate(T, w)
19         w = x.p.right
20
21       w.color = x.p.color
22       x.p.color = BLACK
23       w.right.color = BLACK
24       Left-Rotate(T, x.p)
25       x = T.root
26     else
27       % como el bloque de arriba pero intercambiando left
28       % por right, y Left-Rotate por Right-Rotate
29
30   x.color = BLACK
```

© 2018 Blai Bonet

Análisis de la eliminación

RB-Delete(T, z) toma tiempo $O(h) = O(\log n)$ sin contar el tiempo de **RB-Delete-Fixup(T, x)** por la llamada a **Tree-Minimum**

- En el caso 1 se realizan operaciones de tiempo constante y luego se pasa al caso 2, 3 o 4
- Los casos 3 y 4 terminan por la asignación de la raíz a x en línea 25
- El caso 2 termina con la asignación $x = x.p$ por lo que el número de iteraciones está acotado por $O(h) = O(\log n)$

Entonces, **RB-Delete(T, z)** toma tiempo $O(\log n)$

© 2018 Blai Bonet

Correctitud de la eliminación

Ver el libro!

© 2018 Blai Bonet

Resumen

- Los árboles rojo negro implementan todas las operaciones sobre conjuntos dinámicos en tiempo $O(\log n)$ en el peor caso donde n es el número de elementos almacenados en el árbol
- Los árboles rojo negro asignan colores a los nodos (rojo o negro) para mantener los árboles aproximadamente balanceados
- Las operaciones de inserción y eliminación de nodos autobalancean el árbol utilizando los colores y las rotaciones
- Las operaciones de query son las mismas que para los árboles binarios de búsqueda ya que un árbol rojo negro es un tipo especial de árbol binario de búsqueda

Ejercicios (1 de 5)

1. (13.1-1) Dibuje un árbol binario de búsqueda completo de altura 3 para las claves $\{1, 2, \dots, 15\}$. Agregue el sentinela `nil` de color negro y luego pinte los nodos de rojo y negro de forma que resulten diferentes árboles rojo negro de alturas negra 2, 3 y 4
2. (13.1-3) Considere un árbol rojo negro que satisface todas las propiedades excepto P2 (i.e. la raíz es roja en vez de negra). Si cambiamos el color de la raíz de rojo a negro, ¿es el árbol resultante un árbol rojo negro?
3. (13.1-5) Muestre que el camino simple más largo desde la raíz a una hoja en un árbol rojo negro tiene longitud que es a lo sumo el doble a la longitud del camino simple más corto de la raíz a una hoja
4. (13.1-6) ¿Cuál es el número mayor de nodos internos que un árbol rojo negro de altura negra k puede tener? ¿Cuál es el menor número posible?

Ejercicios (2 de 5)

5. (13.1-7) Describa un árbol rojo negro que tenga la mayor proporción de nodos rojos internos con respecto a nodos negros internos. ¿Cuál es dicha proporción? ¿Cuál es la menor tal proporción y cuál es su valor?
6. (13.2-1) Escriba la rutina `Right-Rotate`
7. (13.2-2) Argumente que en un **árbol binario de búsqueda** con n nodos existen exactamente $n - 1$ rotaciones posibles
8. Muestre que las rotaciones preservan la propiedad de árbol binario de búsqueda

Ejercicios (3 de 5)

9. (13.2-3) Sean a , b y c nodos arbitrarios en subárboles α , β y γ respectivamente en siguiente figura. ¿Cómo cambian las profundidades de a , b y c cuando una rotación a la izquierda es aplicada al nodo x ?

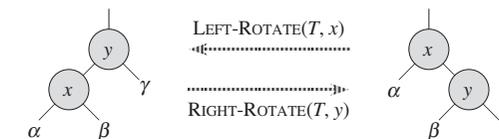


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

10. (13.2-4) Muestre que un **árbol binario de búsqueda** cualquiera con n nodos puede ser transformado a otro árbol binario de búsqueda cualquiera mediante la aplicación de $O(n)$ rotaciones (Ayuda: primero muestra que bastan $n - 1$ rotaciones para transformar cualquier árbol binario de búsqueda en un árbol binario que consiste de una única cadena más a la derecha)

Ejercicios (4 de 5)

11. (13.3-1) En la línea 21 de **RB-Insert**, se pinta de rojo el nuevo nodo insertado. Si lo hubieramos pintado de negro, entonces las propiedades P2 y P4 no serían violadas. ¿Por qué se escoge pintar de rojo el nuevo nodo y no de negro?
12. (13.3-2) Muestre el árbol rojo negro que resulta de hacer inserciones sucesivas de las claves 41, 38, 31, 12, 19 y 8 sobre un árbol rojo negro inicialmente vacío
13. (13.3-3) Suponga que la altura negra de cada uno de los subárboles α , β , γ , δ y ε en las figuras para los casos 1, 2 y 3 de la inserción es k . Verifique que la transformación indicada preserva la propiedad P5
14. (13.3-4) Muestre que **RB-Insert-Fixup** no cambia el color del nodo **nil**

Ejercicios (5 de 5)

15. (13.3-5) Considere un árbol rojo negro de n nodos construido a partir de una secuencia de n llamadas a **RB-Insert**. Argumente que si $n > 1$, el árbol tiene al menos un nodo rojo
16. (13.4-3) En el ejercicio 12 se le pide calcular el árbol rojo negro que resulta de una secuencia de inserciones. Partiendo de ese árbol, muestre los árboles que resultan de eliminar de forma sucesiva las claves 8, 12, 19, 31, 38 y 41
17. (13.4-7) Suponga que un nodo x es insertado en un árbol rojo y negro con **RB-Insert** y luego eliminado inmediatamente con **RB-Delete**. ¿Es el árbol resultante el mismo antes de la inserción? Justifique