CI2613: Algoritmos y Estructuras III

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Enero-Marzo 2015

Apareamiento bipartito
(bipartite matching)

Problema de apareamiento en grafos

Dado un grafo **no dirigido** $G = (V, E)$, un apareamiento o matching de G, es un subconjunto M de aristas tal que:

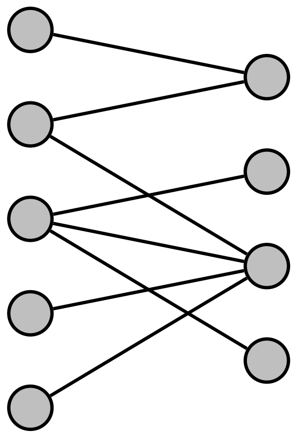
– para todo $v \in V$, existe a lo sumo una arista en M incidente en v

Un **matching máximo** es un matching de máxima cardinalidad; i.e. M es máximo si para cualquier matching M' se cumple $|M| \geq |M'|$

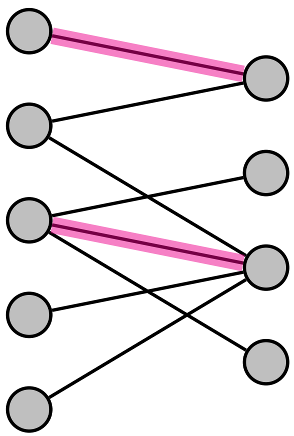
Estudiaremos el problema de calcular un matching máximo en un **grafo bipartito**

Recordar: un grafo $G = (V, E)$ es bipartito ssi los vértices se pueden particionar de forma $V = L \cup R$ tal que $(u, v) \in E$ implica $u \in L$ y $v \in R$

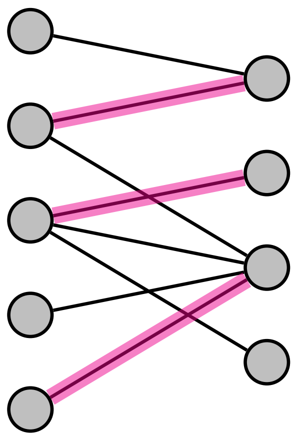
Problema de apareamiento en grafos: Ejemplo



Problema de apareamiento en grafos: Ejemplo



Problema de apareamiento en grafos: Ejemplo



Matchings bipartitos y el método de Ford-Fulkerson

Usaremos el método de Ford-Fulkerson para calcular matchings máximos en grafos bipartitos

Dado $G = (V, E)$, la idea es construir una red $G' = (V', E')$ tal que:

– flujos (integrales) de G' se corresponden con los matchings de G

– si el flujo f se corresponde con el matching M, entonces $|f| = |M|$

Por lo tanto, calcular un flujo de valor máximo para G' es equivalente a calcular un matching máximo para G

Este enfoque es un caso particular de la **técnica de reducción** en donde un problema se expresa como instancia de otro

Para **garantizar eficiencia**, cada paso de la reducción debe realizarse eficientemente

Reducción

Considere un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$

Construimos la red G' con vértices $V \cup \{s, t\}$ donde s y t son nuevos

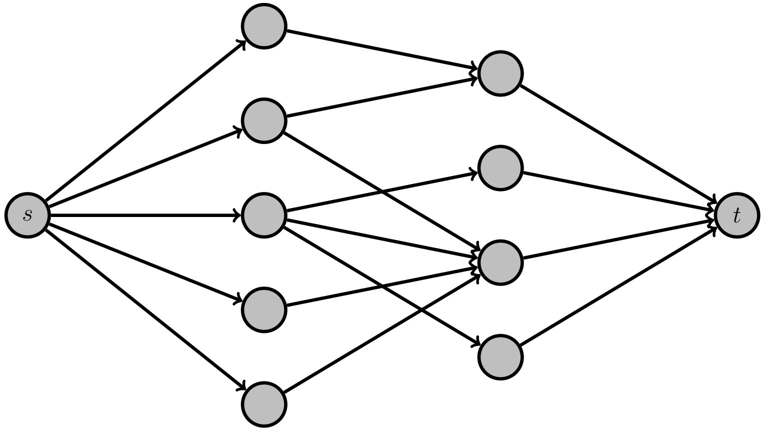
Las aristas de G' son:

$$\begin{aligned} E' &= \{(u,v) : u \in L, v \in R, \{u,v\} \in E\} \cup \\ &\quad \{(s,u) : u \in L\} \cup \\ &\quad \{(v,t) : v \in R\} \end{aligned}$$

Las capacidades son todas iguales a 1

Observar: $|E| \leq |E'| = |E| + |V| \leq 3|E| \implies |E'| = \Theta(E)$

Reducción: Ejemplo



Correctitud de la reducción

Lema

Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito y $G' = (V', E')$ la red corresp.

1. *Si M es un matching, existe un flujo integral f con $|f| = |M|$*
2. *Si f es un flujo integral, existe un matching M con $|M| = |f|$*

Prueba:

1. Sea M un matching para G. Considere $f : V' \times V' \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por:

$$f(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) \in M \\ 1 & \text{si } u = s \text{ y } (v,w) \in M \text{ para algún } w \\ 1 & \text{si } v = t \text{ y } (w,u) \in M \text{ para algún } w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil ver que f es integral, f es un flujo sobre G' y $|f| = |M|$

Correctitud de la reducción

Lema

Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito y $G' = (V', E')$ la red corresp.

1. *Si M es un matching, existe un flujo integral f con $|f| = |M|$*
2. *Si f es un flujo integral, existe un matching M con $|M| = |f|$*

Prueba:

2. Sea f un flujo integral sobre G'. Considere $M \subseteq E$ dado por:

$$M = \{(u,v) : (u,v) \in E \text{ y } f(u,v) > 0\}$$

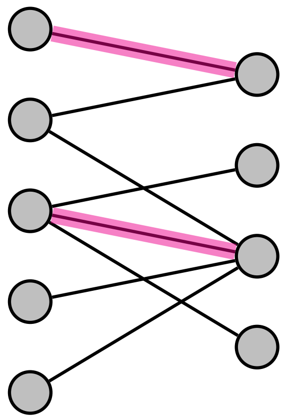
Ya que f es integral, todos sus valores están en $\{0,1\}$

A cada $u \in L$ sólo le entra una arista y por lo tanto existe a lo sumo un $v \in R$ tal que $f(u,v) = 1$ (por conservación de flujo)

Análogamento, para cada $v \in V$ existe a lo sumo un $u \in L$ con $f(u,v) = 1$

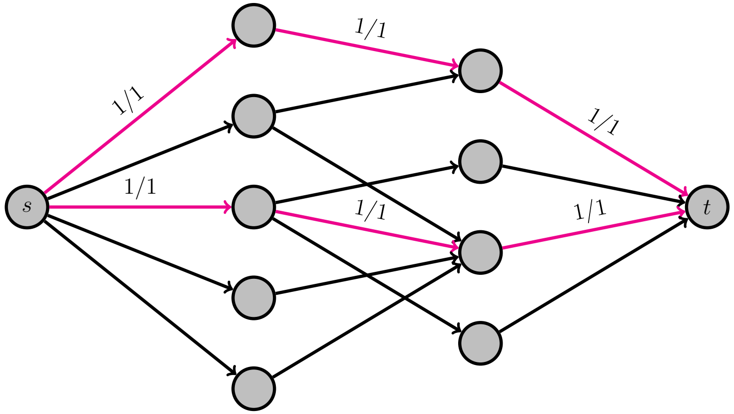
Por lo tanto, M es un matching para G □

Reducción: Ejemplo



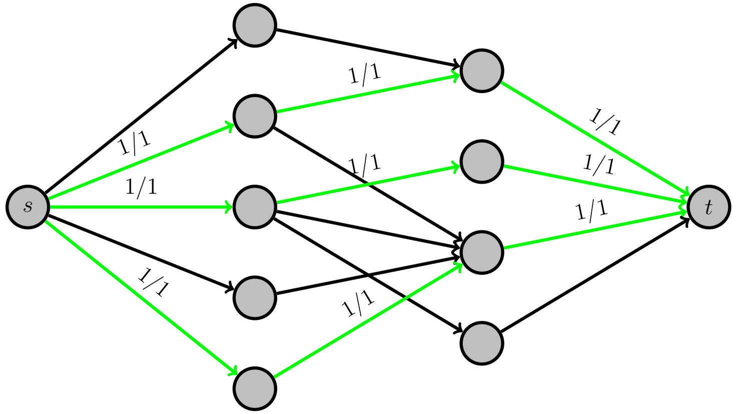
dado un matching M, existe un flujo integral f con $|f| = |M|$

Reducción: Ejemplo



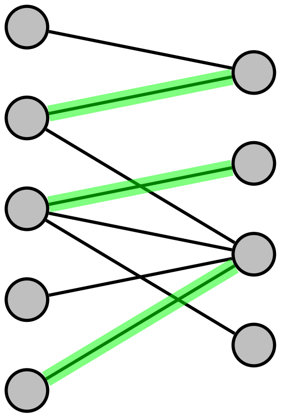
dado un matching M, existe un flujo integral f con $|f| = |M|$

Reducción: Ejemplo



dado un flujo integral f, existe un matching M con $|M| = |f|$

Reducción: Ejemplo



dado un flujo integral f, existe un matching M con $|M| = |f|$

Correctitud de la reducción

Teorema

Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito y $G' = (V', E')$ la red correspondiente. El tamaño del matching máximo para G es igual al valor del flujo máximo sobre G'. Si f^* es un flujo máximo sobre G', $M^* = \{(u,v) \in E : f^*(u,v) > 0\}$ es un matching máximo para G

Prueba: Todos los flujos calculados por Ford-Fulkerson sobre la red G' son integrales y por lo tanto el flujo máximo f^* retornado es integral

Sea M^* el matching correspondiente a f^*. Por el Lema, $|M^*| = |f^*|$

Si M^* no es máximo, existe un matching M' con $|M'| > |M^*|$. Por el Lema, existe un flujo f' con $|f'| = |M'| > |M^*| = |f^*|$

Entonces f^* no es máximo lo cual es una contradicción □

Análisis de Ford-Fulkerson para matchings bipartitos

1. Cada iteración de Ford-Fulkerson aumenta el flujo en al menos 1

2. Todo matching M de $G = (L \cup R, E)$ tiene a lo sumo V aristas (dos aristas distintas en M no pueden ser incidentes en un mismo vértice)

3. Por lo tanto, el método de Ford-Fulkerson ejecuta $O(V)$ iteraciones para encontrar un flujo máximo sobre la red G'

Este algoritmo calcula un matching máximo para un grafo bipartito en tiempo $O(VE)$

Sin embargo, el **algoritmo de Hopcroft-Karp** para matchings bipartitos toma tiempo $O(\sqrt{V}E)$